

第4讲 二次函数的实际应用练习

一、面积问题

练习

1. 2016~2017学年江西上饶婺源县初一上学期期末第20题6分 ★★

如图，小区规划在一个长 $80m$ ，宽 $40m$ 的长方形草坪上修建三条同样宽的甬道，使其中两条与 AB 平行，另一条与 BC 平行，场地的其余部分种草，甬道的宽度为 a 。



(1) 用含 a 的代数式表示草坪的总面积 S ；

(2) 如果每一块草坪的面积都相等，且甬道的宽为 $1m$ ，那么每块草坪的面积是多少平方米？

【答案】 (1) $S = 2a^2 - 160a + 3200$

(2) 每一块草坪的面积是 $507m^2$ 。

【解析】 (1) $S = 80 \times 40 - (80a + 2 \times 40a - 2a^2) = 2a^2 - 160a + 3200$ ；

(2) 当 $a = 1$ 时， $S = 2 \times 1^2 - 160 \times 1 + 3200 = 3042m^2$

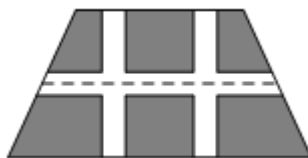
所以每一块草坪的面积为 $3042 \div 6 = 507m^2$

答：每一块草坪的面积是 $507m^2$ 。

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

2. ★★★

如图，要设计一个等腰梯形的花坛，花坛上底长 120 米，下底长 180 米，上下底相距 80 米，在两腰中点连线（虚线）处有一条横向甬道，上下底之间有两纵向甬道，各甬道的宽度相等。设甬道的宽为 x 米。



(1) 用含 x 的式子表示横向甬道的面积为 _____ 平方米。

(2) 当三条甬道的面积是梯形面积的八分之一时，求甬道的宽。

- (3) 根据设计的要求, 甬道的宽不能超过 6 米. 如果修建甬道的总费用 (万元) 与甬道的宽度成正比关系, 比例系数是 5.7, 花坛其余部分的绿化费用为每平方米 0.02 万元, 那么当甬道的宽度为多少米时, 所建花坛的总费用最少? 最少费用是多少万元?

【答案】 (1) $150x$

(2) 甬道的宽度为 5 米.

(3) 当 $x = 6$ 米时, 总费用最少, 最少费用为 238.44 万元.

【解析】 (1) 横向甬道的面积为: $\frac{120+180}{2}x = 150x$.

(2) 依题意得:

$$2 \times 80x + 150x - 2x^2 = \frac{1}{8} \times \frac{120+180}{2} \times 80,$$

整理得 $x^2 - 155x + 750 = 0$, 解得 $x_1 = 5$, $x_2 = 150$ (不符合题意, 舍去).

$\therefore$ 甬道的宽度为 5 米.

(3) 设建设花坛的总费用为 y 万元,

$$y = 0.02 \times \left[\frac{120+180}{2} \times 80 - (2 \times 80x + 150x - 2x^2) \right] + 5.7x = 0.04x^2 - 0.5x + 240$$

当 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{0.5}{2 \times 0.04} = 6.25$ 时, y 的值最小,

因为根据设计的要求, 甬道的宽不能超过 6 米,

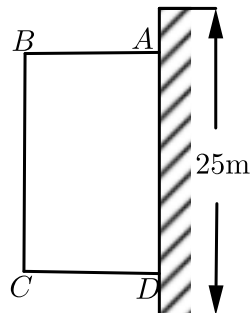
$\therefore$ 当 $x = 6$ 米时, 总费用最少, 最少费用为: $0.04 \times 6^2 - 0.5 \times 6 + 240 = 238.44$ 万元.

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

练习

3. 2018~2019 学年 10 月天津和平区天津市汇文中学初三上学期月考第 23 题 8 分 ★★

为了改善小区环境, 某小区决定要在—块一边靠墙 (墙长 25m) 的空地上修建一个矩形绿化带 $ABCD$, 绿化带—边靠墙, 其它三边用总长为 60 米栅栏围住 (如图), 若设绿化带的 BC 边长为 x 米, 绿化带的面积为 y 平方米.



(1) 求 y 与 x 的函数关系式.

- (2) 直接写出自变量的取值范围 .
- (3) 是否存在绿化带 BC 的长的某个值 , 使得绿化带的面积为 450 平方米 ? 若存在 , 求出这个值 ; 若不存在 , 请说明理由 .

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 30x$.

(2) $0 < x \leq 25$.

(3) 不存在 , 证明见解析 .

【解析】 (1) 由题意得 : $y = x \times \frac{60-x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 30x$.

(2) 自变量 x 的取值范围是 $0 < x \leq 25$.

(3) 当绿化带的面积为 450 平方米时 ,

$$450 = -\frac{1}{2}x^2 + 30x ,$$

$$\text{解得 : } x_1 = x_2 = 30 ,$$

$$\because 0 < x \leq 25 ,$$

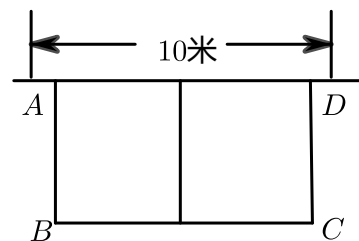
$$\therefore x = 30 \text{ 不和题意 ,}$$

当不存在绿化带 BC 的长的某个值 , 使得绿化带的面积为 450 平方米 .

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

4. 2018年浙江绍兴柯桥区初三中考一模第21题10分 ★★★

如图 , 有长为 24 米的篱笆 , 一面利用墙 (墙的最大可用长度为 10 米) , 围成中间隔有一道篱笆的长方形花圃 , 设花圃的宽 AB 为 x 米 , 面积为 S 米² .



- (1) 求 S 与 x 的函数关系式 .
- (2) 如果要围成面积为 45m^2 的花圃 , AB 的长是多少米 ?
- (3) 能围成面积比 45m^2 更大的花圃吗 ? 如果能 , 请求出最大面积 , 并说明围法 ; 如果不能 , 请说明理由 .

【答案】 (1) $S = -3x^2 + 24x$.

(2) 5m .

(3) 能 , 当长为 10m , 宽为 $\frac{14}{3}\text{m}$ 时 , 最大面积为 $\frac{140}{3}\text{m}^2$.

【解析】 (1) 根据题意 , 得 $S = x(24 - 3x)$,

即所求的函数解析式为： $S = -3x^2 + 24x$.

(2) 根据题意，设 AB 长为 x ，则 BC 长为 $24 - 3x$ ，

则 $-3x^2 + 24x = 45$.

整理，得 $x^2 - 8x + 15 = 0$ ，

解得 $x = 3$ 或 5 ，

当 $x = 3$ 时， $BC = 24 - 9 = 15 > 10$ 不成立，

当 $x = 5$ 时， $BC = 24 - 15 = 9 < 10$ 成立，

$\therefore AB$ 长为 5m .

(3) $S = 24x - 3x^2 = -3(x - 4)^2 + 48$ ，

由于 $0 < 24 - 3x \leq 10$ ，得 $\frac{14}{3} \leq x < 8$.

$\therefore \frac{14}{3} > 4$ ，

$\therefore$ 当 $x = \frac{14}{3}$ 时， S 取得最大值为 $\frac{140}{3} > 45$ ，

$\therefore$ 能围成面积比 45m^2 更大的花园，

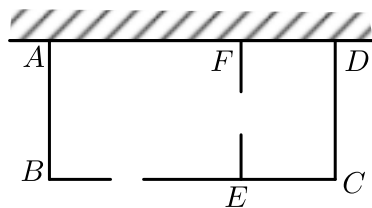
当长为 10m ，宽为 $\frac{14}{3}\text{m}$ 时，最大面积为 $\frac{140}{3}\text{m}^2$.

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

练习

5. 2020~2021学年12月天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期月考第23题 ★★★

一农户用篱笆及一面墙（该墙可用最大长度为 36米 ）围成一个矩形场地 $ABCD$ ，该场地中间隔有一道与 AB 平行的篱笆（ EF ），如图， BE 、 EF 上各留有 1米 宽的门（门不需要篱笆），该农户共用篱笆 58米 ，设该矩形的一边 AB 长 $x\text{米}$ ， $AD > AB$ ，矩形 $ABCD$ 的面积为 S 平方米，



(1) 求出 S 与 x 的函数关系式，直接写出自变量 x 的取值范围 .

(2) 若矩形 $ABCD$ 的面积为 252 平方米，求 AB 的长 .

(3) 怎样围才能是围成的场地面积最大？最大面积是多少？

【答案】 (1) $S = -3x^2 + 60x$ ($8 \leq x < 15$) .

(2) 14米 .

(3) 当 AB 长为 10米 时，围成的场地面积最大，最大面积为 300m^2 .

【解析】 (1) 由题意得： $BC - 1 = 58 - x - x - (x - 1)$ ，

$$\therefore BC = 60 - 3x,$$

$$\therefore ABCD \text{ 的面积: } S = x(60 - 3x) = -3x^2 + 60x,$$

$$\therefore 60 - 3x \leq 36, \quad 60 - 3x > x,$$

$$\therefore 8 \leq x < 15, \text{ 即 } S = -3x^2 + 60x \quad (8 \leq x < 15).$$

$$(2) \text{ 由题意得: } S = -3x^2 + 60x = 252,$$

$$\text{解得: } x = 14 \text{ 或 } 6,$$

$$\therefore \text{由第一问知 } 8 \leq x < 15,$$

$$\therefore x = 14, \text{ 故 } AB \text{ 长为 } 14 \text{ 米}.$$

$$(3) \quad S = -3x^2 + 60x = -3(x - 10)^2 + 300,$$

$$\therefore -3 < 0,$$

$$\therefore \text{抛物线开口向下, } S \text{ 有最大值},$$

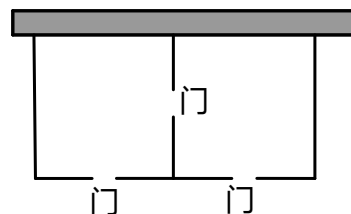
$$\text{当 } x = 10 \text{ 时, } S \text{ 取最大值 } 300,$$

$$\text{故当 } AB \text{ 长为 } 10 \text{ 米时, 围成的场地面积最大, 最大面积为 } 300\text{m}^2.$$

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

6. ★★

某农场拟建两间矩形饲养室，一面靠现有墙（墙足够长），中间用一道墙隔开，并在如图所示的三处各留 1m 宽的门，已知计划中的材料可建墙体（不包括门）的总长为 27m，求饲养室占地的最大面积是多少。



【答案】 75m^2 .

【解析】 设垂直于墙的边长为 $x\text{m}$,

由题意可得面积：

$$S = x(27 + 3 - 3x)$$

$$= x(30 - 3x)$$

$$= -3x^2 + 30x,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{2 \times (-3)} = 5,$$

$$\text{当 } x = 5 \text{ 时, } S_{\text{最大}} = 5 \times (30 - 3 \times 5) = 75.$$

答：饲养室占地的最大面积是 75m^2 .

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

二、利润问题

练习

7. 2019~2020学年天津河西区佟楼中学初三上学期期末模拟（一）第23题 ★★★

某商品的进价为每件 20 元，售价为每件 30 元，每个月可卖出 180 件；如果每件商品的售价每上涨 1 元，则每个月就会少卖出 10 件，但每件售价不能高于 35 元，设每件商品的售价上涨 x 元（ x 为整数），每个月的销售利润为 y 元。

- （1）求 y 与 x 的函数关系式，并直接写出自变量 x 的取值范围；
- （2）每件商品的售价为多少元时，每个月可获得最大利润？最大利润是多少？
- （3）每件商品的售价定为多少元时，每个月的利润恰好是 1920 元？

【答案】（1） $y = -10x^2 + 80x + 1800$ （ $0 \leq x \leq 5$ ，且 x 为整数）；

（2）每件商品的售价为 34 元时，商品的利润最大，为 1960 元；

（3）32 元。

【解析】（1） $y = (30 - 20 + x)(180 - 10x) = -10x^2 + 80x + 1800$ （ $0 \leq x \leq 5$ ，且 x 为整数）；

（2）由（1）知， $y = -10x^2 + 80x + 1800$ （ $0 \leq x \leq 5$ ，且 x 为整数）。

$$\because -10 < 0,$$

$$\therefore \text{当 } x = 4 \text{ 时, } y = 1960 \text{ 元;}$$

$$\therefore \text{每件商品的售价为 34 元.}$$

答：每件商品的售价为 34 元时，商品的利润最大，为 1960 元；

$$\text{(3) } 1920 = -10x^2 + 80x + 1800$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0,$$

$$(x - 2)(x - 6) = 0,$$

$$\text{解得 } x = 2 \text{ 或 } x = 6,$$

$$\because 0 \leq x \leq 5,$$

$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore 30 + 2 = 32 \text{ (元)}$$

$$\therefore \text{售价为 32 元时, 利润为 1920 元.}$$

【标注】【知识点】一元二次方程的利润问题

8. 2016年湖北恩施咸丰县初三中考三模第22题10分 ★★★

某商品的进价为每件 20 元，售价为每件 25 元时，每天可卖出 250 件．市场调查反映：如果调整价格，一件商品每涨价 1 元，每天要少卖出 10 件．

(1) 求出每天所得的销售利润 w (元) 与每件涨价 x (元) 之间的函数关系式．

(2) 求销售单价为多少元时，该商品每天的销售利润最大．

(3) 商场的营销部在调控价格方面，提出了 A，B 两种营销方案．

方案 A：每件商品涨价不超过 5 元．

方案 B：每件商品的利润至少为 16 元．

请比较哪种方案的最大利润更高，并说明理由．

【答案】 (1) $w = -10x^2 + 200x + 1250$ 或 $w = -10(x - 10)^2 + 2250 (0 \leq x \leq 25)$

(2) 销售单价为 35 元时，该商品每天的销售利润最大．

(3) 方案 B 最大利润更高．

【解析】 (1) 根据题意得： $w = (25 + x - 20)(250 - 10x)$

即： $w = -10x^2 + 200x + 1250$ 或 $w = -10(x - 10)^2 + 2250 (0 \leq x \leq 25)$

(2) $\because -10 < 0$ ， $\therefore$ 抛物线开口向下，二次函数有最大值，

当 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{2 \times (-10)} = 10$ 时，销售利润最大

此时销售单价为： $10 + 25 = 35$ (元)

答：销售单价为 35 元时，该商品每天的销售利润最大．

(3) 由 (2) 可知，抛物线对称轴是直线 $x = 10$ ，开口向下，对称轴左侧 w 随 x 的增大而增大，对称轴右侧 w 随 x 的增大而减小

方案 A：根据题意得， $x \leq 5$ ，则 $0 \leq x \leq 5$

当 $x = 5$ 时，利润最大

最大利润为 $w = -10 \times 5^2 + 200 \times 5 + 1250 = 2000$ (元)，

方案 B：根据题意得， $25 + x - 20 \geq 16$ ，

解得： $x \geq 11$

则 $11 \leq x \leq 25$ ，

故当 $x = 11$ 时，利润最大，

最大利润为 $w = -10 \times 11^2 + 200 \times 11 + 1250 = 2240$ (元)，

$\because 2240 > 2000$ ，

$\therefore$ 综上所述，方案 B 最大利润更高．

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

练习

9. 2017~2018 学年河南洛阳洛龙区洛阳市第五十五中学初三上学期期中第 20 题 12 分 ★★★

某水果批发商销售每箱进价为 40 元的苹果，物价部门规定每箱售价不得高于 55 元，市场调查发现，若每箱以 50 元的价格销售，平均每天销售 90 箱，价格每提高 1 元，平均每天少销售 3 箱。

- (1) 求平均每天销售量 y 箱与销售价 x 元/箱之间的函数关系式。
- (2) 求该批发商平均每天的销售利润 w (元) 与销售价 x (元/箱) 之间的函数关系式。
- (3) 当每箱苹果的售价为多少元时，可以获得最大利润？最大利润是多少？

【答案】 (1) $y = -3x + 240$.

(2) $w = -3x^2 + 360x - 9600$.

(3) 销售价 $x = 55$ 元时，利润 w 最大，为 1125 元。

【解析】 (1) $y = 90 - 3(x - 50)$ ，即 $y = -3x + 240$.

(2) $w = (x - 40)y = (x - 40)(-3x + 240)$
 $= -3x^2 + 360x - 9600$.

(3) $w = -3x^2 + 360x - 9600$
 $= -3(x - 60)^2 + 1200$,
 $\because x \leq 55$,
 $\therefore$ 当销售价 $x = 55$ 元时，利润 w 最大，
最大利润为 1125 元。

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

10. 2020~2021 学年山东烟台龙口市初三上学期期中第 24 题 ★★★

小李在景区销售一种旅游纪念品，已知每件进价为 6 元，当销售单价定为 8 元时，每天可以销售 200 件，市场调查反映：销售单价每提高 1 元，日销量将会减少 10 件，物价部门规定：销售单价不能超过 12 元，设该纪念品的销售单价为 x (元)，日销量为 y (件)，日销售利润为 w (元)。

- (1) 求 y 与 x 的函数关系式。
- (2) 要使日销售利润为 720 元，销售单价应定为多少元？
- (3) 求日销售利润 w (元) 与销售单价 x (元) 的函数关系式，当 x 为何值时，日销售利润最大，并求出最大利润。

【答案】 (1) $y = 280 - 10x$.

(2) 销售单价定为 10 元。

(3) 函数关系式为 $w = -10x^2 + 340x - 1680$ ，当 $x = 12$ 时， $w_{\max} = 960$ (元)。

【解析】 (1) $y = 200 - (x - 8) \cdot 10 = 280 - 10x$.

(2) $w = y \cdot (x - 6) = (280 - 10x) \cdot (x - 6)$
 $= -10x^2 + 340x - 1680$,

令 $w = 720$, 即 $-10x^2 + 340x - 1680 = 720$.

解得 : $x_1 = 24$, $x_2 = 10$, 又 $\because$ 销售单价不超过 12 元 .

$\therefore x = 10$, 即销售单价应定为 10 元 .

(3) 由 (2) 得 $w = -10x^2 + 340x - 1680$

$$= -10(x - 17)^2 + 1210 ,$$

当 $x = 17$ 时 , 获最大利润 , 但 $x \leq 12$,

$\therefore$ 当 $x = 12$ 时 ,

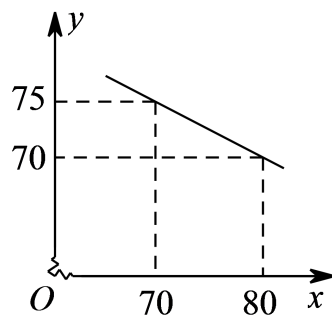
得最大利润为 $w_{\max} = -10 \times (12 - 17)^2 + 1210 = 960$.

答 : 当 $x = 12$ 时 , 获日销最大利润 960 元 .

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

11. 2019~2020学年9月天津和平区天津市益中学校初三上学期月考第23题 ★★★

为早日实现脱贫奔小康的宏伟目标 , 我市结合本地丰富的山水资源 , 大力发展旅游业 , 王家庄在当地政府的支持下 , 办起了民宿合作社 , 专门接待游客 , 合作社共有 80 间客房 . 根据合作社提供的房间单价 x (元) 和游客居住房间数 y (间) 的信息 , 乐乐绘制出 y 与 x 的函数图象如图所示 .



(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式 .

(2) 合作社规定每个房间价格不低于 60 元且不超过 150 元 , 对于游客所居住的每个房间 , 合作社每天需支出 20 元的各种费用 , 房价定为多少时 , 合作社每天获利最大 ? 最大利润是多少 .

【答案】 (1) y 与 x 之间的函数关系式是 $y = -0.5x + 110$.

(2) 房价定为 120 元时 , 合作社每天获利最大 , 最大利润是 5000 元 .

【解析】 (1) 设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b$,

$$\begin{cases} 70k + b = 75 \\ 80k + b = 70 \end{cases} , \text{ 得 } \begin{cases} k = -0.5 \\ b = 110 \end{cases} ,$$

即 y 与 x 之间的函数关系式是 $y = -0.5x + 110$.

(2) 设合作社每天获得的利润为 w 元 ,

$$\begin{aligned} w &= x(-0.5x + 110) - 20(-0.5x + 110) \\ &= -0.5x^2 + 120x - 2200 \end{aligned}$$

$$= -0.5(x - 120)^2 + 5000$$

$$\because 60 \leq x \leq 150,$$

$\therefore$ 当 $x = 120$ 时, w 取得最大值, 此时 $w = 5000$,

$\therefore$ 房价定为 120 元时, 合作社每天获利最大, 最大利润是 5000 元.

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

练习

12. 2019~2020 学年 10 月天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初三上学期月考第 18 题 12 分

★★★

某商场销售一种小商品, 每件进货价为 190 元. 调查发现, 当销售价为 210 元时, 平均每天能销售 8 件; 当销售价每降低 2 元时, 平均每天就能多销售 4 件. 设每件小商品降价 x 元, 平均每天销售 y 件.

(1) 直接写出 y 与 x 之间的函数关系式 (不必写出 x 的取值范围).

(2) 商场要想使这种小商品平均每天的销售利润达到 280 元, 求每件小商品的销售价应定为多少元?

(3) 设每天的销售总利润为 w 元, 求 w 与 x 之间的函数关系式; 每件商品降价多少元时, 每天的总利润最大? 最大利润是多少?

【答案】 (1) $y = 8 + 2x$.

(2) 每件小商品的销售价应定为 204 元或 200 元时, 每天的销售利润达到 280 元.

(3) $w = -2(x - 8)^2 + 288$,

每件商品的降价 8 元时, 每天可获得最大利润, 最大的月利润是 288.

【解析】 (1) $\because$ 设每件小商品降价 x 元, 平均每天销售 y 件,

$\therefore y$ 与 x 间的函数关系式为: $y = 8 + 2x$.

(2) $(210 - 190 - x)(8 + 2x) = 280$,

解得: $x_1 = 10$, $x_2 = 6$,

$\therefore$ 每件小商品的销售价应定为 204 元或 200 元时,

每天的销售利润达到 280 元.

(3) 由题意得出:

$$w = (210 - 190 - x)(8 + 2x) = -2(x - 8)^2 + 288,$$

$$a = -2 < 0,$$

故当 $x = 8$ 时, w 有最大值 288,

综上所述, 每件商品的降价 8 元时, 每天可获得最大利润, 最大的月利润是 288.

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

13. 2019~2020学年9月湖南长沙岳麓区长沙市一中岳麓中学初三上学期月考第23题9分 ★★★

某服装超市购进单价为 30 元的童装若干件，物价部门规定其销售单价不低于每件 30 元，不高于每件 60 元．销售一段时间后发现：当销售单价为 60 元时，平均每月销售量为 80 件，而当销售单价每降低 10 元时，平均每月能多售出 20 件．同时，在销售过程中，每月还要支付其他费用 450 元．设销售单价为 x 元，平均月销售量为 y 件．

- (1) 求出 y 与 x 的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围．
- (2) 当销售单价为多少元时，销售这种童装每月可获利 1800 元？
- (3) 当销售单价为多少元时，销售这种童装每月获得利润最大？最大利润是多少？

【答案】(1) $y = -2x + 200$ ($30 \leq x \leq 60$)

(2) 55 元．

(3) 当销售单价为 60 元时，销售这种童装每月获得利润最大，最大利润是 1950 元．

【解析】(1) 由题意得： $y = 80 + 20 \times \frac{60 - x}{10}$

$\therefore$ 函数的关系式为： $y = -2x + 200$ ($30 \leq x \leq 60$)

(2) 由题意得： $(x - 30)(-2x + 200) - 450 = 1800$

解得 $x_1 = 55$, $x_2 = 75$ (不符合题意，舍去)

答：当销售单价为 55 元时，销售这种童装每月可获利 1800 元．

(3) 设每月获得的利润为 w 元，由题意得：

$$w = (x - 30)(-2x + 200) - 450 = -2(x - 65)^2 + 2000$$

$$\because -2 < 0$$

$\therefore$ 当 $x \leq 65$ 时， w 随 x 的增大而增大

$$\because 30 \leq x \leq 60$$

$$\therefore \text{当 } x = 60 \text{ 时, } w_{\text{最大}} = -2(60 - 65)^2 + 2000 = 1950$$

答：当销售单价为 60 元时，销售这种童装每月获得利润最大，最大利润是 1950 元．

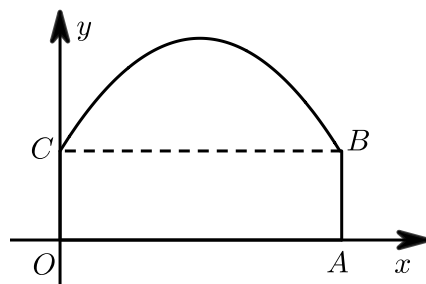
【标注】【知识点】二次函数的利润问题

三、拱桥问题

练习

14. 2019~2020学年天津和平区初三上学期期末第10题5分 ★★★

如图，隧道的截面由抛物线和长方形 $OABC$ 构成，长方形的长 OA 是 12m ，宽 OC 是 4m ，按照图中所示的平面直角坐标系，抛物线可以用 $y = -\frac{1}{6}x^2 + bx + c$ 表示．在抛物线型拱壁上需要安装两排灯，使它们离地面的高度相等，如果灯离地面的高度不超过 8m ，那么两排灯的水平距离最小是（ ）．



A. 2m

B. 4m

C. $4\sqrt{2}\text{m}$

D. $4\sqrt{3}\text{m}$

【答案】 D

【解析】 由题意得 $C(0, 4)$ ， $B(12, 4)$ ，

且 B ， C 都经过抛物线 $y = -\frac{1}{6}x^2 + bx + c$ ，

$$\therefore \begin{cases} 4 = c \\ 4 = -\frac{1}{6} \times 12^2 + b \times 12 + c \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x + 4$ ，

当灯离地面高 8m 时，两排灯的水平距离最小，

$\therefore y = 8$ 时，

$$8 = -\frac{1}{6}x^2 + 2x + 4$$

解得： $x_1 = 6 + 2\sqrt{3}$ ， $x_2 = 6 - 2\sqrt{3}$ ，

$$x_1 - x_2 = 4\sqrt{3}$$

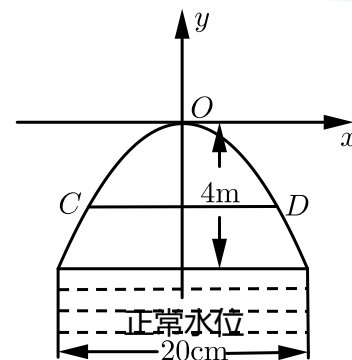
所以两排灯的水平距离最小是 $4\sqrt{3}\text{m}$ ．

故选 D．

【标注】 【知识点】二次函数的其他实际问题

15. 2017~2018学年12月天津天津市益中学校初三上学期月考第22题 ★★★

在一座抛物线型拱桥，正常水位时，桥下水面宽度为 20m ，拱顶距水面 4m ，此时，桥下的水深为 2m ，位保证过往船只顺利航行，桥下水面宽度不得小于 18m ，求水深超过多少米时，就会影响过往船在桥下顺利航行？



【答案】 2.76米 .

【解析】 令解析式为 $y = ax^2 (a \neq 0)$,

由题意知 , 代入 $(10, -4)$,

$$-4 = 100a ,$$

$$a = -\frac{1}{25} ,$$

$$\therefore y = -\frac{1}{25}x^2 ,$$

$$\text{当 } x = 9 \text{ 时, } y = -\frac{1}{25} \times 9^2 = -\frac{81}{25} ,$$

$$2 + 4 - \frac{81}{25} = 2\frac{19}{25} = 2.76 \text{ 米} ,$$

答 : 水深超过 2.76 米时会影响航行 .

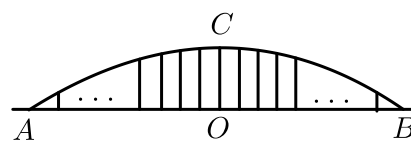
【标注】 【知识点】 二次函数的通行问题

16. 2020~2021学年山东临沂费县初三上学期期中第23题12分 ★★★

图①中是一座钢管混凝土系杆拱桥 , 桥的拱肋 ACB 可视为抛物线的一部分 (如图②) , 桥面 (视为水平的) 与拱肋用垂直于桥面的系杆连接 , 测得拱肋的跨度 AB 为 200 米 , 与 AB 中点 O 相距 20 米处有一高度为 48 米的系杆 .



图①



图②

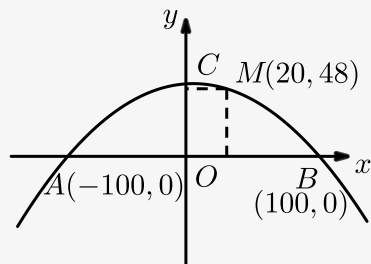
(1) 求正中间系杆 OC 的长度 .

(2) 若相邻系杆之间的间距均为 5 米 (不考虑系杆的粗细) , 则是否存在一根系杆的长度恰好是 OC 长度的一半 ? 请说明理由 .

【答案】 (1) 50m .

(2) 不存在一根系杆的长度恰好是 OC 长度的一半 , 证明见解析 .

【解析】(1) 如图所示, 以点 O 为原点, OB 所在直线为 x 轴,



OC 所在直线为 y 轴建立空间直角坐标系,

$\because AB = 200$ 米, 与 AB 中点 O 相距 20 米处有一高度为 48 米的系杆,

$\therefore$ 由题意可知: $B(100, 0)$, $M(20, 48)$,

设该抛物线对应的函数关系式为: $y = ax^2 + c$,

$$\text{则: } \begin{cases} 10000a + c = 0 \\ 400a + c = 48 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{200} \\ c = 50 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{200}x^2 + 50,$$

$\therefore$ 正中间系杆 OC 的长度为 50m.

故答案为: 50m.

(2) 设存在一根系杆的长度恰好是 OC 长度的一半, 即为 25 米,

$$\text{则 } 25 = -\frac{1}{200}x^2 + 50,$$

$$\text{解得 } x = \pm 50\sqrt{2},$$

$\therefore$ 相邻系杆之间的间距均为 5 米,

$\therefore$ 每根系杆上点的横坐标均为整数,

$$x = \pm 50\sqrt{2} \text{ 与实际不符,}$$

$\therefore$ 不存在一根系杆的长度恰好是 OC 长度的一半.

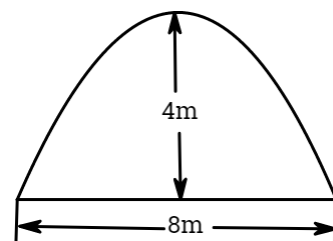
【标注】【知识点】建立平面直角坐标系解抛物线的实际问题

练习

17. 2020~2021 学年 11 月广东深圳福田区红岭中学园岭校区初三上学期周测 D 卷第 20 题 ★★★

解答:

(1) 一辆宽 2 米的货车要通过跨度为 8 米, 拱高为 4 米的单行抛物线隧道 (从正中通过), 为保证安全, 车顶左右两侧离隧道的垂直距离至少要 0.5 米, 求货车的限高为多少?

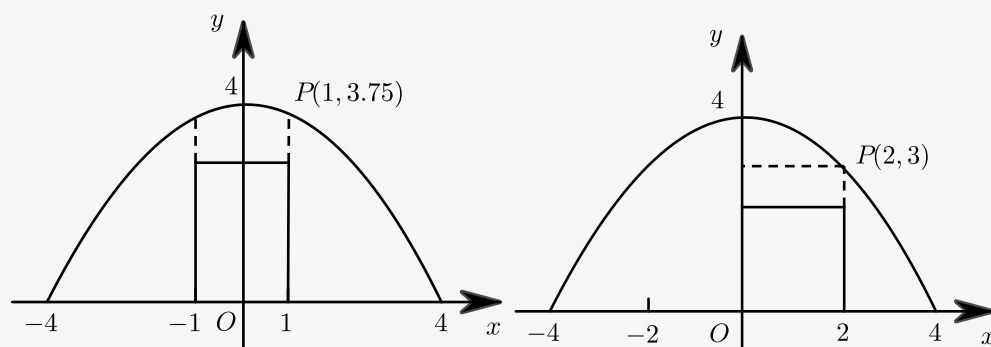


(2) 若将(1)中的单行道改为双行道,即货车必须从隧道中线的右侧通过,求货车的限高应是多少?

【答案】 (1) 3.25米.

(2) 2.5米.

【解析】 (1) 建立如图所示坐标系,



$\therefore$ 抛物线的顶点坐标是 $(0, 4)$,

$\therefore$ 可设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + 4$.

又 $\therefore$ 抛物线过 $(4, 0)$ 点, $\therefore 0 = a \times 4^2 + 4$,

$$\therefore a = -\frac{1}{4}.$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \quad (-4 \leq x \leq 4)$$

当 $x = 1$ 时, $y = 3.75$.

$\therefore$ 货车限高为 $3.75 - 0.5 = 3.25$ (米).

(2) 当 $x = 2$ 时, $y = 3$,

故货车限高为 $3 - 0.5 = 2.5$ (米).

【标注】【知识点】二次函数的通行问题

18. 2017~2018学年湖南长沙雨花区湖南广益实验中学初二下学期期中第24题8分 ★★

一座拱桥的轮廓是抛物线型(如图1所示),拱高6m,跨度20m,相邻两支柱间的距离均为5m.

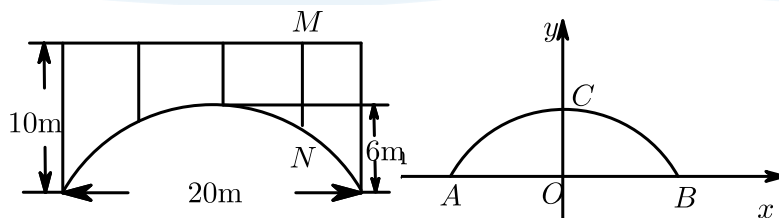


图 1

图 2

- (1) 将抛物线放在所给的直角坐标系中(如图 2 所示), 其表达式是 $y = ax^2 + c$ 的形式. 请根据所给的数据求出 a , c 的值.
- (2) 求支柱 MN 的长度.
- (3) 拱桥下地平面是双向行车道(正中间是一条宽 2m 的隔离带), 其中的一条行车道能否并排行驶宽 2m、高 3m 的三辆汽车(汽车间的间隔忽略不计)? 请说说你的理由.

【答案】 (1) $a = -\frac{3}{50}$, $c = 6$.

(2) 支柱 MN 的长度是 5.5 米.

(3) 一条行车道能并排行驶这样的三辆汽车.

【解析】 (1) 根据题目条件, A 、 B 、 C 的坐标分别是 $(-10, 0)$ 、 $(10, 0)$ 、 $(0, 6)$.

将 B 、 C 的坐标代入 $y = ax^2 + c$, 得 $\begin{cases} 6 = c \\ 0 = 100a + c \end{cases}$

解得 $a = -\frac{3}{50}$, $c = 6$.

所以抛物线的表达式是 $y = -\frac{3}{50}x^2 + 6$.

(2) 可设 $N(5, y_N)$, 于是 $y_N = -\frac{3}{50} \times 5^2 + 6 = 4.5$.

从而支柱 MN 的长度是 $10 - 4.5 = 5.5$ 米.

(3) 设 DE 是隔离带的宽, EG 是三辆车的宽度和, 则 G 点坐标是 $(7, 0)$,

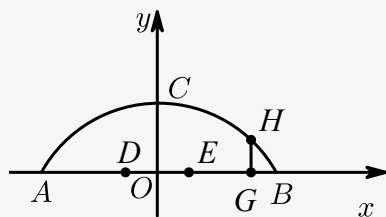


图 2

$(7 = 2 \div 2 + 2 \times 3)$.

过 G 点作 GH 垂直 AB 交抛物线于 H , 则 $y_H = -\frac{3}{50} \times 7^2 + 6 = 3 + \frac{3}{50} > 3$.

根据抛物线的特点, 可知一条行车道能并排行驶这样的三辆汽车.

【标注】【知识点】二次函数的通行问题

四、轨迹问题

19. 2017~2018学年10月广东广州海珠区江南中学初三上学期月考第8题3分 ★★

运动会上，某运动员掷铅球时，所掷的铅球的高 y (m) 与水平的距离 x (m) 之间的函数关系式为

$$y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3},$$
 则该运动员的成绩是 ().

A. 6m

B. 12m

C. 8m

D. 10m

【答案】 D

【解析】 令 $y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0$,

$$\text{整理得: } x^2 - 8x - 20 = 0,$$

$$(x - 10)(x + 2) = 0,$$

解得 $x_1 = 10$, $x_2 = -2$ (舍去),

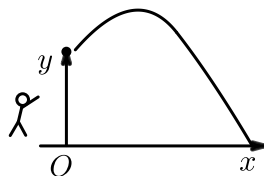
答: 该运动员此次掷铅球的成绩是 10m.

【标注】 【知识点】 二次函数的轨迹问题

20. 2015~2016学年10月天津和平区天津市耀华中学初三上学期月考第23题10分 ★★

一名男生推铅球，铅球行进高度 y (单位: m) 与水平距离 x (单位: m) 之间的关系是

$$y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3},$$
 铅球运行路线如图.



(1) 求铅球推出的水平距离.

(2) 求铅球行进的最大高度.

【答案】 (1) 10米.

(2) 最大高度为 3m.

【解析】 (1) 当 $y = 0$ 时, $-\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0$,

解之得 $x_1 = 10$, $x_2 = -2$ (不合题意, 舍去),

所以推铅球的水平距离是 10米.

$$\begin{aligned} (2) \quad y &= -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, \\ &= -\frac{1}{12}(x^2 - 8x + 16 - 16) + \frac{5}{3}, \\ &= -\frac{1}{12}(x^2 - 8x + 16) + \frac{5}{3} + \frac{4}{3}, \\ &= -\frac{1}{12}(x - 4)^2 + 3, \end{aligned}$$

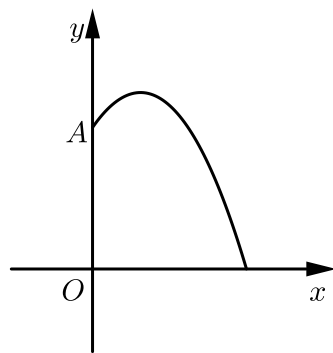
当 $x = 4$ 时, y 取最大值 3,

所以铅球行进的最大高度为 3m .

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题

21. 2019~2020学年9月天津和平区天津市汇文中学初三上学期月考第23题10分 ★★★

如图是某公园一喷水池，在水池中央有一垂直于地面的喷水柱，喷水时，水流在各方向沿形状相同的抛物线落下．若水流喷出的高度 $y(\text{m})$ 与水平距离 $x(\text{m})$ 之间的函数关系式为 $y = -(x - 1)^2 + 2.25$.



- (1) 求喷出的水流离地面的最大高度 .
- (2) 求喷嘴离地面的高度 .
- (3) 若把喷水池改成圆形，那么水池半径至少为多少时，才能使喷出的水流不落在水池外？

【答案】(1) 2.25m .

(2) 1.25m .

(3) 2.5m 时 .

【解析】(1) $\because$ 水流喷出的高度 $y(\text{m})$ 与水平距离 $x(\text{m})$ 之间的函数关系式为 $y = -(x - 1)^2 + 2.25$

$\therefore$ 喷出的水流离地面的最大高度为： 2.25m .

(2) 当 $x = 0$, 则 $y = -(0 - 1)^2 + 2.25 = 1.25(\text{m})$,

答：喷嘴离地面的高度为 1.25m .

(3) 由题意可得； $y = 0$ 时， $0 = -(x - 1)^2 + 2.25$,

解得： $x_1 = -0.5$, $x_2 = 2.5$,

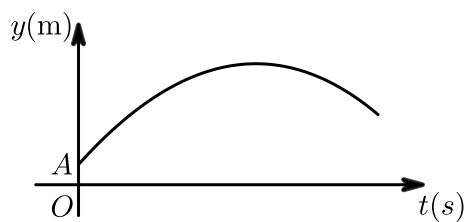
答：水池半径至少为 2.5m 时，才能使喷出的水流不落在水池外 .

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题

22. 2020~2021学年浙江杭州滨江区杭二中白马湖学校初三上学期开学考试第21题10分 ★★★

如图，某足球运动员站在点 O 处练习射门，将足球从离地面 0.5m 的 A 处正对球门踢出（点 A 在 y 轴上），足球的飞行高度 y （单位： m ）与飞行时间 t （单位： s ）之间满足函数关系 $y = at^2 + 5t + c$,

已知足球飞行 0.8s 时，离地面的高度为 3.5m .



(1) 足球飞行的时间是多少时，足球离地面最高？最大高度是多少？

(2) 若足球飞行的水平距离 x (单位：m) 与飞行时间 t (单位：s) 之间具有函数关系 $x = 10t$ ，已知球门的高度为 2.44m，如果该运动员正对球门射门时，离球门的水平距离为 28m，他能否将球直接射入球门？

【答案】 (1) 足球飞行的时间是 $\frac{8}{5}$ s 时，最大高度是 $\frac{9}{2}$ m .

(2) 他能将球直接射入球门 .

【解析】 (1) 由题意得：函数 $y = at^2 + 5t + c$ 的图象经过 $(0, 0.5)$ ， $(0.8, 3.5)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 0.5 = c \\ 3.5 = 0.8^2 a + 5 \times 0.8 + c \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = -\frac{25}{16} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为：} y = -\frac{25}{16}t^2 + 5t + \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{8}{5} \text{ 时，} y_{\max} = \frac{9}{2}.$$

$$\therefore \text{足球飞行的时间是 } \frac{8}{5} \text{ s 时，最大高度是 } \frac{9}{2} \text{ m}.$$

(2) 把 $x = 28$ 代入 $x = 10t$ 得 $t = 2.8$ ，

$$\therefore \text{当 } t = 2.8 \text{ 时，} y = -\frac{25}{16} \times 2.8^2 + 5 \times 2.8 + \frac{1}{2} = 2.25 < 2.44,$$

$\therefore$ 他能将球直接射入球门 .

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题